

Rade Božović, Vladimir Orlić

DIGITALNA OBRADA SIGNALA

Alfa BK Univerzitet, Beograd

2026. godine

Rade Božović, Vladimir Orlić

Digitalna obrada signala

Recenzenti:

Prof. dr Vladimir Mladenović

Prof. dr Goran Keković

Izdavač:

Alfa BK Univerzitet

Bulevar Maršala Tolbuhina 8, Beograd

Za izdavača:

Prof. dr Jovan Veselinović

Dizajn naslovne strane:

Dr Rade Božović

Štampa:

RIS studio, Beograd

Tiraž:

300 primeraka

ISBN: 978-86-6461-105-3

Copyright © Rade Božović i Vladimir Orlić, 2026

Sva prava su zadržana. All rights reserved.

Predgovor

Digitalna obrada signala spada u relativno mladu naučnu oblast koju karakteriše izuzetno dinamičan i rapidan razvoj u poslednjih nekoliko decenija zahvaljujući izuzetnom napretku na poljima mikroprocesora, mikrokontrolera i računarske i softverske industrije generalno. Jeftina i relativno brza digitalna kola omogućila su izgradnju visoko sofisticiranih digitalnih sistema sposobnih da obavljaju složene funkcije i zadatke digitalne obrade signala, koji su obično suviše složeni i/ili ekonomski neisplativi da bi se izvršavali korišćenjem analogne elektronike ili sistema za analognu obradu signala. Upravo zbog toga se mnogi zadaci obrade signala, odnosno analize vremenski promenljivih fizičkih procesa, a koji su se tradicionalno izvršavali analognim putem, danas obavljaju pomoću jeftinijeg i često pouzdanijeg digitalnog hardvera. Razvoj savremenih sistema za obradu signala se danas bazira uglavnom na digitalnoj tehnologiji.

Tehnologija digitalne obrade signala i njen dramatičan napredak značajno su uticali na savremeno društvo u svim oblastima, poput kompjuterskog inženjeringa, elektronske industrije, telekomunikacionih sistema, biomedicinskog inženjerstva, audiotehnike i muzičke industrije generalno, seizmologije, robotike itd. Bez digitalne obrade signala, ne bismo imali Internet u ovakvoj formi razmene audio i video materijala, digitalno snimanje, digitalne kamere, mobilne telefone, digitalnu satelitsku i televizijsku tehnologiju, kao ni žične i bežične mreže. Medicinski instrumenti bi bili manje efikasni ili ne bi mogli da pruže korisne informacije za preciznu dijagnozu bez digitalnih EKG analizatora, digitalnih rendgenskih i medicinskih sistema za prikaz slika. Takođe bismo živeli na mnogo manje efikasan način, jer ne bismo imali napredne sisteme za prepoznavanje glasa, sisteme za sintezu govora, kao ni sisteme za obradu slike i videa. Bez digitalne obrade signala, naučnici, inženjeri i tehničari raznih profila ne bi imali na raspolaganju moćne alate za analizu i vizuelizaciju podataka, dizajniranje, i slično.

Autori ne žele da impliciraju da je digitalna obrada signala najbolje i najispravnije rešenje za sve probleme obrade signala. Na primer, za mnoge signale sa izuzetno širokim spektrom učestanosti, koji se koriste u telekomunikacionim mrežama, neophodna je obrada u realnom vremenu. Za takve signale, analogna ili, možda čak, optičko procesiranje signala je jedino moguće rešenje. Međutim, u primenama gde su dostupni digitalni sklopovi, koji mogu da izvrše obradu signala dovoljno brzo, obično je digitalna obrada signala poželjniji izbor.

Posebna draž digitalne obrade signala leži u uskoj povezanosti teorije i prakse. Softverske tehnologije na današnjem stupnju razvoja i njihova široka rasprostranjenost omogućavaju da se stečeno teorijsko znanje i mnogobrojni algoritmi za digitalnu obradu kontinualnih signala, za simulaciju kontinualnih procesa i sistema, kreativno primeni u rešavanju praktičnih problema. Takav

koncept savremene nastave gde se uspostavlja bliska relacija teorije i prakse značajno pospešuje i olakšava proces uspešnog savladavanja ove značajne naučne oblasti. Stoga, u celoj knjizi primetna je tendencija balansirano pristupa između izložene teorije i praktične primene. Za rešavanje pojedinih praktičnih problema primenjivan je softverski paket MATLAB, proizvođača MathWorks. U pitanju je najpoznatiji softverski alat koji se koristi u praksi za rešavanje problema digitalne obrade signala. Ova naučna oblast inače spada u veoma kompleksne i multidisciplinarne, i samim tim potrebna su znanja širokog spektra da bi se uspešno savladala. Odnosno, ukoliko pojedinac želi da napreduje u ovoj oblasti mora konstantno da se usavršava kako bi uspešno održavao korak sa intenzivnim razvojem digitalne obrade signala. Naravno, glavni preduslov za to jeste temeljno poznavanje fundamentalnih osnova obrade signala.

Cilj ove knjige je da čitaocima omogući uvod u osnovne alate i tehnike za analizu u digitalnoj obradi signala. Prvi korak predstavlja uvođenje neophodne terminologije i opisivanje važnih operacija koje su povezane sa procesom pretvaranja analognog signala u digitalni oblik pogodan za dalju digitalnu obradu. Digitalna obrada analognih signala ima određene nedostatke. Prvi i najvažniji jeste da konvertovanje analognog signala u digitalni oblik (koje se realizuje odabiranjem signala i kvantizacijom tih odbiraka) dovodi do izobličenja koje sprečava potpunu rekonstrukciju originalnog (izvornog) analognog signala na osnovu kvantizovanih odbiraka. Kontrola nivoa ovog izobličenja postiže se pažljivim dizajnom, odnosno pravilnim izborom frekvencije odabiranja i povećanom preciznošću u procesu kvantizacije. Drugo, postoje efekti ograničene (konačne) preciznosti koji se moraju uzeti u obzir prilikom digitalne obrade kvantizovanih odbiraka. Iako su ova važna pitanja delimično razmatrana u ovoj knjizi, glavni akcenat je stavljen na analizu i projektovanje sistema za digitalnu obradu signala i računarske tehnike. Knjiga sadrži devet poglavlja u kojima je obrađeno redom: reprezentacija diskretnih signala i sistema u vremenskom i frekvencijskom domenu, linearni vremenski invarijantni sistemi (eng. *Linear Time Invariant - LTI*), Furijeova transformacija (eng. *Fourier Transformation - FT*), z transformacija, diskretna Furijeova (eng. *Discret Fourier Transformation - DFT*) i brza Furijeova (eng. *Fast Fourier Transformation - FFT*) transformacija, diskretizacija kontinualnih signala, funkcija prenosa i frekvencijski odziv LTI sistema, digitalni filtri sa beskonačnim impulsnim odzivom (eng. *Infinite Impulse Response - IIR*) i konačnim impulsnim odzivom (eng. *Finite Impulse Response - FIR*).

Knjiga je namenjena prvenstveno studentima osnovnih akademskih studija Fakulteta za informacione tehnologije, Alfa BK Univerziteta u Beogradu. Međutim, može da bude od koristi i ostalim zainteresovanim čitaocima da se upoznaju sa osnovama ove savremene naučne oblasti.

Beograd, februar 2026. godine

Sadržaj:

Spisak slika:	x
Spisak tabela:	xvi
1. Diskretni signali i sistemi: analiza u vremenskom domenu	1
Ciljevi	1
1.1 Uvod	1
1.2 Osnovni koncept digitalne obrade signala	2
1.3 Kontinualni i diskretni signali	4
1.4 Operacije sa diskretnim signalima i nizovima	7
1.4.1 Tipični diskretni signali	8
1.5 Linearni vremenski invarijantni sistemi	13
1.5.1 Linearne diferencne jednačine sa konstantnim koeficijentima	16
1.5.2 Stabilnost i kauzalnost LTI sistema	18
1.5.3 Blok dijagram diskretnih sistema	19
Rezime	20
Zadaci za vežbu	21
2. Analiza diskretnih signala i sistema u frekvencijskom domenu: Furijeove serije i Furijeova transformacija	23
Ciljevi	23
2.1 Uvod	23
2.2 Odziv LTI sistema na kompleksni eksponencijalni signal	24
2.3 Furijeova transformacija diskretnih signala	28
2.4 Osobine Furijeove transformacije	29
2.5 Konvolucija u vremenskom domenu	33
2.6 Konvolucija u frekvencijskom domenu	36
2.7 Parsevalova teorema	39
Rezime	41
Zadaci za vežbu	42
3. Z transformacija	44
Ciljevi	44

3.1 Uvod	44
3.2 Definicija z transformacije	44
3.3 Oblast konvergencije z transformacije	46
3.4 Nule i polovi z transformacije	47
3.5 Inverzna z transformacija	53
3.6 Osobine z transformacije	57
3.7 Parsevalova teorema	63
Rezime	63
Zadaci za vežbu	63
4. Digitalna obrada kontinualnih signala	65
Ciljevi	65
4.1 Uvod	65
4.2 Diskretizacija kontinualnog (analognog) signala	66
4.3 Predstavljanje procesa odabiranja u frekvencijskom domenu	69
4.4 Rekonstrukcija frekvencijski ograničenog signala iz njegovih odbiraka ..	78
4.5 Ekvivalentni analogni filter	82
4.6 Praktični aspekti sistema za diskretizaciju i rekonstrukciju signala	84
4.6.1 Prefilter (<i>Anti-aliasing filter</i>)	85
4.6.2 Pamti-prati proces (<i>Sample&Hold</i>)	86
4.6.3 Realna A/D konverzija	87
4.7 Realni sistem za digitalnu obradu signala	91
Rezime	95
5. Diskretna Furijeova transformacija	96
Ciljevi	96
5.1 Uvod	96
5.2 Definicija DFT	98
5.3 DFT i inverzna DFT (IDFT)	101
5.4 Rotacioni faktori i osobine	104
5.5 Matrični prikaz DFT	105
5.6 Odnos DFT prema drugim transformacijama	108

5.7 Osobine DFT	110
5.8 Parsevalova teorema.....	112
5.9 Ciklična konvolucija.....	113
5.10 Spektralna analiza primenom DFT.....	118
Rezime.....	129
Zadaci za vežbu	130
6. Brza Furijeova transformacija	131
Ciljevi	131
6.1 Uvod	131
6.2 Red kompleksnosti FFT algoritama	132
6.3 FFT algoritam sa razbijanjem po frekvenciji	135
6.4 FFT algoritam sa razbijanjem po vremenu.....	140
6.5 Računanje u mestu.....	146
Rezime.....	147
7. Linearni vremenski invarijantni sistemi za digitalnu obradu signala	148
Ciljevi.....	148
7.1 Uvod	148
7.2 Diferencne jednačine i digitalno filtriranje.....	148
7.3 Nule i polovi funkcije prenosa; stabilnost i kauzalnost.....	155
7.4 Frekvencijski odziv	158
7.4.1. Uticaj položaja nula i polova funkcije prenosa na frekvencijske karakteristike	160
7.5 Idealni filter	162
7.5.1 Idealne karakteristike frekvencijskog odziva	163
7.5.2 Idealni diferencijator i Hilbertov transformator	164
7.5.3 Realno ostvarive karakteristike LTI sistema	165
7.6 Funkcija prenosa linearne faze	172
7.7 Funkcija prenosa propusnika svih frekvencija (<i>all-pass</i> filter)	174
7.8 Funkcija prenosa minimalne faze.....	176
7.9 Postupak projektovanja LTI sistema.....	180

Rezime.....	182
Zadaci za vežbu	183
8. Digitalni filtri konačnog impulsnog odziva (FIR).....	185
Ciljevi.....	185
8.1 Uvod	185
8.2 Osnovne karakteristike FIR filtara	186
8.3 FIR filtri linearne faze	189
8.4 Specifikacije FIR filtara	195
8.5 Projektovanje FIR filtara primenom metoda prozora.....	197
8.5.1 Projektovanje NF FIR filtra primenom prozora	203
8.5.2 Kajzerov prozor.....	207
8.5.3 Zaključna razmatranja o primeni prozorskih funkcija.....	209
8.6 Projektovanje FIR filtara na bazi primene odabiranja u domenu frekvencije	209
8.7 Projektovanje FIR filtara na bazi primene optimizacionih metoda.....	212
8.7.1 Formulisanje problema aproksimacije	212
8.8 Poređenje postupaka sinteze FIR filtara	219
Rezime.....	220
Zadaci za vežbu	221
9. Metode projektovanja filtara sa beskonačnim impulsnim odzivom (IIR)	223
Ciljevi.....	223
9.1 Uvod	223
9.2 Sinteza analognih funkcija prenosa	224
9.3 Zahtevane specifikacije i osnovne definicije.....	226
9.4 Klasične aproksimacione funkcije za analogne filtre	230
9.4.1 Batervortov filter	230
9.4.2 Čebiševljeva aproksimacija prve vrste	234
9.4.3 Čebiševljeva aproksimacija druge vrste – Inverzni Čebiševljev filter	236
9.4.4 Eliptički filter	238
9.4.5 Poređenje različitih tipova aproksimacije	239

9.4.6 Beselov filter	240
9.4.7 Frekvencijske transformacije	241
9.5 Analogno - digitalne transformacije	244
9.5.1 Impulsno invarijantna transformacija.....	244
9.5.2 Bilinearna transformacija	249
9.6 Frekvencijske transformacije digitalnih filtara.....	252
9.7 Korekcija grupnog kašnjenja.....	253
9.8 Projektovanje diskretnog sistema – FIR ili IIR funkcija prenosa?	256
Rezime.....	257
Zadaci za vežbu.....	258
Literatura	260
Indeks pojmova	262
Biografija autora.....	264

Spisak slika:

Slika 1.1 Blok šema sistema za digitalnu obradu signala	3
Slika 1.2 Blok šema sistema za digitalnu obradu signala sa dodatnom analognom obradom.	3
Slika 1.3 Analogni prostoperiodični signal – primer	4
Slika 1.4 Diskretan vremenski signal dobijen diskretizacijom signala iz primera 1.3.....	5
Slika 1.5 Digitalizovani diskretan signal – primer.....	5
Slika 1.6 Formiranje digitalnog signala – primer	6
Slika 1.7 Digitalna obrada analognog signala	6
Slika 1.8 Jedinični impuls $\delta[n]$	8
Slika 1.9 Pomeran jedinični impuls za $n = 2$	9
Slika 1.10 Jedinični odskočni niz $u[n]$	9
Slika 1.11 Pomeran jedinični odskočni niz $u[n - 2]$	10
Slika 1.12 Sinusoidalni diskretni signal.....	11
Slika 1.13 Eksponencijalni diskretni signal.....	11
Slika 1.14 Sinusni periodični niz, $\omega = \frac{4\pi}{7}$	12
Slika 1.15 Primer dva različita kontinualna signala sa istim diskretnim signalima	13
Slika 1.16 Koncept diskretnog sistema.....	13
Slika 1.17 Diskretni linearni sistem.....	14
Slika 1.18 Ilustracija vremenski invarijantnog sistema	15
Slika 1.19 Odziv sistema na jedinični impuls.....	17
Slika 1.20 Prikaz LTI sistema preko impulsnog odziva	17
Slika 1.21 Primer stabilnog LTI sistema	18
Slika 1.22 Prikaz osnovnih operacija (kašnjenje, sabiranje i množenje, respektivno)....	19
Slika 1.23 Blok dijagram sistema prvog reda	20
Slika 2.1 Primer (a) pobudnog signala, (b) odziva sistema	26
Slika 2.2 Frekvencijski odziv LTI sistema (LP filter)	27
Slika 2.3 Amplitudski i fazni spektar posmatranog niza iz primera 2.3	33
Slika 2.4 Odziv sistema iz primera 2.4 u frekvencijskom domenu.....	36
Slika 2.5 Odziv sistema iz primera u vremenskom domenu.....	36
Slika 2.6 Prikaz signala u vremenskom domenu iz primera 2.5	38

Slika 2.7 Amplitudski spektar signala iz primera 2.5	38
Slika 3.1 Primer prikaza apsolutnih vrednosti z transformacije	47
Slika 3.2 Prikaz ROC, nula i polova niza iz primera 3.2	48
Slika 3.3 RoC, nule i polovi antikauzalnog niza iz primera 3.3.....	49
Slika 3.4 RoC, nule i polovi konačnog niza iz primera 3.5 (filter za usrednjavanje dužine 3).	51
Slika 3.5 Impulsni odziv LTI sistema iz primera 3.6.....	51
Slika 3.6 ROC, nule i polovi kauzalnog niza iz primera 3.6.....	52
Slika 4.1 Blok dijagram digitalne obrade kontinualnog signala	65
Slika 4.2 Blok šema idealnog C/D konvertora.....	66
Slika 4.3 Prikaz analognog signal i njegovih diskretnih odbiraka sa periodom odabiranja T	67
Slika 4.4 <i>Sample&hold</i> ulaz (napon) za ADC	67
Slika 4.5 Prikaz adekvatno odabranog signala (gore) i neadekvatno odabranog sinusnog signala (dole).....	69
Slika 4.6 Pojednostavljena šema procesa odabiranja.....	70
Slika 4.7 Blok šema C/D konverzije.....	70
Slika 4.8 Spektar diskretnog signala (pravilno odabiranje)	72
Slika 4.9 Spektar diskretizovanog signala	73
Slika 4.10 Idealan sistem za rekonstrukciju signala iz njegovih odbiraka.....	75
Slika 4.11 Prikaz pravilno rekonstruisanog signala (levo) i preklapanje pri odabiranju (<i>aliasing</i>) zbog nepravilno odabrane frekvencije odabiranja (desno).....	76
Slika 4.12 Spektar analognog signala iz primera 4.1.....	77
Slika 4.13 Spektar signala dobijenog odabiranjem analognog signala iz primera 4.1	77
Slika 4.14 (a) Faze rekonstrukcije analognog signala na osnovu odbiraka, (b) frekvencijski odziv filtra za rekonstrukciju, (c) impulsni odziv filtra za rekonstrukciju	78
Slika 4.15 Faze rekonstrukcije signala	80
Slika 4.16 Spektar diskretizovanog signala za slučaj $f_s = 2f_{max}$	80
Slika 4.17 Spektar diskretizovanog signala za slučaj $f_s > 2f_{max}$	81
Slika 4.18 Spektar diskretizovanog signala za slučaj $f_s < 2f_{max}$	81
Slika 4.19 Spektar diskretizovanog signala iz primera 4.2	82
Slika 4.20 Spektar rekonstruisanog signala	82
Slika 4.21 Ekvivalentni analogni filter	83

Slika 4.22 Idealan (a) i realan (b) model sistema za diskretizaciju i rekonstrukciju analognih signala	85
Slika 4.23 Amplitudska karakteristika predfiltra – različiti načini realizacije	85
Slika 4.24 Amplitudska karakteristika predfiltra – zadati gabariti	86
Slika 4.25 a) Idealizovan pamti-prati process b) tipični ulazni i izlazni signal pamti-prati kola.....	87
Slika 4.26 Karakteristika kvantizacije sa 8 kvantizacionih nivoa.....	88
Slika 4.27 Primer karakteristike kvantizacije rezolucije 0.25.....	88
Slika 4.28 (a) Primer kvantizacije sa 8 nivoa (b) signal greške	89
Slika 4.29 Tipičan A/D proces.....	91
Slika 4.30 Konverzija diskretnog signala u analogni signal A) Obrada digitalnog signala B) Rekonstrukcija diskretizovanog signala C) Rekonstrukcija naponskog nivoa <i>Pamti-Prati</i> kola D) Rekonstruisani analogni signal.	92
Slika 4.31 Kaskadna veza D/A konvertora i <i>postfiltra</i>	92
Slika 4.32 D/A konverzija korišćenjem kola zadrške	93
Slika 4.33 Proces rekonstrukcije analognog signala u frekvencijskom domenu	94
Slika 5.1 Primer diskretizovanog signala (gornja slika) i njegovog amplitudskog spektra (donja slika)	97
Slika 5.2 Dualnost teoreme odabiranja a) Diskretan niz $x[n]$ b) Apsolutna vrednost Furijeove trasnformacije c) periodično produženi niz $x_p[n]$ d) apsolutna vrednost DFT	99
Slika 5.3 Izdvajanje segmenta signala dužine N korišćenjem prozorske funkcije	99
Slika 5.4 Uticaj odabira vrednosti N na predstavljanje diskretnog signala $x[n]$	100
Slika 5.5 Položaj rotacionih faktora u z ravni ($N=8$).....	105
Slika 5.6 Q funkcija, za $N=5$, za opseg $0 \leq \omega < 2\pi$	109
Slika 5.7 Odnos Z , FT i DFT transformacije	109
Slika 5.8 Ilustracija cikličnog pomeraja	112
Slika 5.9 Vremenski oblik pobudnog signala i impulsnog odziva sistema iz primera 5.4	116
Slika 5.10 Odziv sistema iz primera 5.4	117
Slika 5.11 Upoređivanje rezultata dobijenih LK i CK u primeru 5.4	118
Slika 5.12 Primena DFT/FFT u obradi signala.....	119
Slika 5.13 Sekvenca signala iz primera 5.5	122
Slika 5.14 Amplitudski i fazni spektar signala iz primera 5.5	123

Slika 5.15 Spektar snage signala iz primera 5.5	124
Slika 5.16 Jednostrani amplitudski spektar signala iz primera 5.5	124
Slika 5.17 Dvostrani i jednostrani amplitudski spektar i spektar snage signala u primeru 5.6.	127
Slika 5.18 Amplitudski spektar i spektar snage signala iz primera 5.6 dobijen primenom FFT.....	128
Slika 5.19 Blok šema tipičnog analizatora spektra	129
Slika 6.1 Prvi korak izračunavanja FFT u 8 tačaka	137
Slika 6.2 Definicija osnovnih grafičkih operacija.....	137
Slika 6.3 Drugi korak izračunavanja FFT u 8 tačaka.....	137
Slika 6.4 Blok dijagram izračunavanja FFT u 8 tačaka (treći korak)	137
Slika 6.5 Proces inverzije bita u FFT.....	139
Slika 6.6 FFT blok dijagram za sekvencu iz primera 6.1	139
Slika 6.7 Struktura leptira DIT algoritma a) direktna prezentacija para b) struktura sa jednim kompleksnim množenjem	142
Slika 6.8 Dijagram toka prve dekompozicije za niz dužine $N=8$. Povezivanje 2 DFT dužine 4.	143
Slika 6.9 Dijagram toka druge dekompozicije sa povezivanjem 4 DFT-a dužine 2	143
Slika 6.10 Leptir za elementarni DIT DFT od dve tačke.....	144
Slika 6.11 Dijagram toka DFT u 8 tačaka	144
Slika 6.12 Odbirci signala iz primera 6.2	145
Slika 6.13 Vrednosti rotacionih faktora za signal iz primera 6.2.....	145
Slika 6.14 Sprovođenje FFT DIT algoritma kroz etape (3)	146
Slika 7.1 LTI sistem za digitalnu obradu signala.....	149
Slika 7.2 Primer grafičkog prikaza položaja nula i polova u z ravni (IIR)	156
Slika 7.3 Primer grafičkog prikaza položaja nula i polova u z ravni (FIR)	156
Slika 7.4 Grafički prikaz rasporeda nula i polova sistema iz primera 7.4.....	157
Slika 7.5 Periodičnost amplitudske (a) i fazne (b) karakteristike	160
Slika 7.6 Primer geometrijskog određivanja frekvencijskog odziva na osnovu položaja nula i polova.....	162
Slika 7.7 Impulсни odziv idealnog NF filtra: a) nulta fazna karakteristika b) linearna fazna karakteristika.....	164
Slika 7.8 Tipičan gabarit amplitudske karakteristike NF filtra	166
Slika 7.9 Propusni i nepropusni opseg, prelazna zona NF filtra u z ravni	167

Slika 7.10 Prikaz nula i polova u z ravni	169
Slika 7.11 Amplitudska i fazna karakteristika za datu prenosnu funkciju (a) u primeru 7.5	170
Slika 7.12 Amplitudska i fazna karakteristika za datu prenosnu funkciju (b) u primeru 7.5	171
Slika 7.13 Amplitudska i fazna karakteristika za datu prenosnu funkciju (c) u primeru 7.5	171
Slika 7.14 Amplitudska i fazna karakteristika za datu prenosnu funkciju (d) u primeru 7.5	171
Slika 7.15 Amplitudska i fazna karakteristika FIR filtra (nepropusnik opsega), grupno kašnjenje	173
Slika 7.16 Raspored nula i polova u z ravni	174
Slika 7.17 Recipročnost nula i polova stabilnog propusnika svih frekvencija (<i>all pass</i>)	175
Slika 7.18 Amplitudska, fazna karaktersitika i karakteristika grupnog kašnjenja svepropusnika frekvencija (<i>all pass</i>).....	176
Slika 7.19 Primer realizacije racionalne funkcije prenosa preko proizvoda funkcija minimalne faze i funkcije prenosa svepropusnika	177
Slika 7.20 Impulsni odziv MA filtra dužine 4	179
Slika 7.21 Amplitudska karakteristika MA filtra dužine 4	179
Slika 7.22 Raspored nula i polova u z ravni MA filtra dužine 4	180
Slika 8.1 Primer FIR sistema sa linearnom faznom karakterisitkom i raspored nula i polova u z ravni	187
Slika 8.2 Primer FIR sistema sa nelinearnom faznom karakterisitkom i raspored nula i polova u z ravni	188
Slika 8.3 Relacije između realne amplitudske funkcije, faze, amplitudske karakteristike i fazne karakteristike	189
Slika 8.4 Simetričan raspored nula funkcije prenosa FIR sistema linearne faze – primer	192
Slika 8.5 Simetrija impulsnih odziva četiri tipa FIR filtra.....	193
Slika 8.6 Tipične amplitudske funkcije četiri osnovna tipa FIR filtra	193
Slika 8.7 Tipične amplitudske karakteristike četiri osnovna tipa FIR filtra.....	194
Slika 8.8 Tipična fazna karakteristika za četiri osnovna tipa FIR filtara	194
Slika 8.9 Tipične karakteristike grupnog kašnjenja za četiri osnova tipa FIR filtara ...	195
Slika 8.10 Specifikacija za amplitudsku karakteristiku NF filtra	196
Slika 8.11 Specifikacija za amplitudsku funkciju NF filtra	197

Slika 8.12 a) Frekvencijski odziv idealnog NF filtra i pravougaone prozorske funkcije b) Frekvencijski odziv FIR filtra dobijenog odsecanjem	199
Slika 8.13 Vremenski oblik pet osnovnih prozorskih funkcija	201
Slika 8.14 Uporedni prikaz spektra prozora	201
Slika 8.15 Zavisnost vremenskog oblika prozorske funkcije (Hanove) od dužine impulsnog odziva	202
Slika 8.16 Promena spektra prozorske funkcije (Hanova) u zavisnosti od dužine impulsnog odziva	202
Slika 8.17 Frekvencijski odziv filtra PO iz primera 8.1.....	206
Slika 8.18 Specifikacija amplitudske karaktersitike NF filtra projektovanog primenom Kajzerovog prozora	208
Slika 8.19 Željena i realizovana amplitudska funkcija	214
Slika 8.20 Amplitudska i fazna karakteristika projektovanog FIR filtra	218
Slika 8.21 Frekvencijski odziv projektovanog FIR filtra (zumiran propusni opseg)....	219
Slika 9.1 Analogni filter – ulazno/izlazna relacija.....	225
Slika 9.2 Primer stabilnog kontinualnog (levo) i diskretnog (desno) sistema – raspored nula i polova u s i z ravni.....	226
Slika 9.3 Gabariti amplitudske tolerancije preko parametara ε i A	228
Slika 9.4 Amplitudska karakteristika Batervortovog filtra za različite dužine (red filtra)	231
Slika 9.5 Projektni zadatak sa zadatim gabaritima (NF).....	231
Slika 9.6 Raspored polova Batervortovog filtra za različite vrednosti N	233
Slika 9.7 Amplitudska karakteristika Čebiševljevog filtra prve vrste za različite vrednosti Čebiševljevog polinoma.....	235
Slika 9.8 Raspored nula i polova Čebiševljevog filtra prve vrste – primer	236
Slika 9.9 Uporedni prikaz kvadrata amplitudskih karakteristika	237
Slika 9.10 Amplitudska karakteristika eliptičkog filtra (primer za $N=4,5$).....	239
Slika 9.11 Uporedni prikaz (a) amplitudske karakteristike i (b) karakteristike grupnog kašnjenja Batervorotovog i Beselovog filtra petog reda	241
Slika 9.12 Uporedne karakteristike ((a) slabljenje i (b) fazna karateristika) analognog i digitalnog Batervortovog filtra 3. reda.....	249
Slika 9.13 Svojstva preslikavanja iz s u z ravni	250
Slika 9.14 Amplitudska i fazna karakteristika dizajniranog digitalnog filtra iz primera 9.2	256

Spisak tabela:

Tabela 2.1 Neki karakteristični primeri Furijeovih transformacionih parova	29
Tabela 2.2 Neke karakteristične osobine Furijeove transformacije.....	40
Tabela 3.1 Impulsni odziv LTI sistema iz primera 3.5 (filter za usrednjavanje, dužine 3)	50
Tabela 3.2 Neki karakteristični z transformacioni parovi i oblasti konvergencije	54
Tabela 3.3 Pregled nekih od najvažnijih osobina z transformacije	62
Tabela 5.1 Vrednosti rotacionih faktora za $N=8$	105
Tabela 5.2 Osobina linearnosti FT i DFT.....	110
Tabela 6.1 Rotacioni faktori na primeru W_8^{nk}	134
Tabela 6.2 Uporedni pregled broja aritmetičkih operacija za direktni DFT i FFT.....	135
Tabela 6.3 Mapiranje indeksa	138
Tabela 7.1 Postupak projektovanja LTI sistema po fazama.....	182
Tabela 8.1 Koeficijenti generalizovanih kosinusnih prozora	200
Tabela 8.2 Neke karakteristike standardnih prozorskih funkcija.	203
Tabela 8.3 Frekvencijski i impulsni odziv standardnih tipova idealnih filtara.....	204
Tabela 8.4 Vrednosti parametra β za ekvivalentan Kajzerov prozor.	207
Tabela 9.1 Uzajamne relacije parametara dozvoljenih tolerancija amplitudske karakteristike u propusnom i nepropusnom opsegu	229
Tabela 9.2 Transformacija NF prototipa u druge tipove filtara (NF, VF, PO i NO). ...	252

1. Diskretni signali i sistemi: analiza u vremenskom domenu

Ciljevi

Cilj ovog poglavlja je da čitaoci steknu osnovno razumevanje pojma signala i sistema u kontekstu digitalne obrade signala. Poseban fokus stavljen je na razlikovanje pojmova analognih, diskretnih i digitalnih signala, kao i na razumevanje procesa odabiranja i kvantizacije. Čitaoci bi trebalo da ovladaju osnovnim operacijama nad diskretnim signalima i nizovima, da prepoznaju i koriste tipične diskretne sekvence koje se često susreću u praksi. Poglavlje ima za cilj i da se analiziraju osobine diskretnih sistema, sa posebnim akcentom na linearne vremenski invarijantne sisteme (LTI), koji su kauzalni i stabilni. Definisan je pojam impulsnog odziva sistema i čitaoci se upoznaju kako se na osnovu te karakteristike određuje odziv na svaku pobudu primenom matematičke operacije konvolucije. Na kraju, čitaoci se osposobljavaju da modeluju diskretne sisteme pomoću diferencnih jednačina i blok dijagrama, odnosno da uvide razlike između FIR i IIR sistema.

1.1 Uvod

Signal se može definisati kao bilo koja fizička veličina koja se menja u vremenu, prostoru, ili u zavisnosti od neke druge nezavisne promenljive ili više promenljivih. Matematički se opisuje kao funkcija jedne ili više nezavisno promenljivih. Jedan primer prirodnog signala je elektrokardiogram (EKG). Takav signal lekaru pruža informacije o stanju srca pacijenta. Slično tome, elektroencefalogram (EEG) pruža informacije o aktivnosti mozga. Govor, elektrokardiogram i elektroencefalogram su primeri signala koji nose informacije i predstavljaju se kao funkcije jedne nezavisne promenljive — vremena. Primer signala koji je funkcija dve nezavisne promenljive jeste signal dobijen analizom slike. U tom slučaju, nezavisne promenljive su prostorne koordinate. Ovo su samo neki od brojnih primera prirodnih signala koji se susreću u praksi.

U opštem slučaju, nezavisna promenljiva može biti bilo koja fizička veličina. Ipak, najčešće je u pitanju vreme, te se uobičajeno signali posmatraju kao funkcije vremena. Signal je nosilac određene informacije. Sadržaj informacije koju on nosi zapisan je u promenama funkcije ili nekog od njenih relevantnih parametara. Imajući to u vidu, jedna od definicija signala bi mogla da glasi i da je to svaka fizička veličina koja je funkcija vremena i koji nosi informaciju o nekoj veličini od interesa.

Signali koje koristimo u stvarnom životu najčešće su *analogni signali*. To su signali koji su neprekidna funkcija vremena, a čija amplituda može uzimati proizvoljnu vrednost, ali iz nekog dozvoljenog opsega vrednosti. Primeri takvih analognih signala uključuju struju, napon, temperaturu itd. Ustvari, većina signala nastalih iz prirodnih izvora, kao i veštački generisanih (eng. *man-made*) su analogni. Sa druge strane, *diskretni signali* su definisani samo za diskretne vrednosti nezavisne promenljive vremena. Diskretni signali nastaju diskretizacijom analognih signala uz poštovanje određenih uslova za realizaciju tog postupka. Međutim, postoje i signali koji se izvorno formiraju u diskretnom obliku (npr. dnevni kursevi valuta, digitalni senzori koji mere neke veličine u tačno određenim vremenskim trenucima, itd.). Ukoliko se dodatno izvrši kvantizacija amplitude diskretnog signala dobija se *digitalni signal*.

Generalno, sistem za obradu signala vrši transformaciju ulaznog signala u izlazni signal željenog formata. Sistem se dakle može definisati kao fizički uređaj koji obavlja neku operaciju nad signalom. Na primer, filter koji se koristi za smanjenje šuma i interferencije, koji deformišu željeni signal (koji je nosilac informacije), naziva se sistem. U ovom slučaju, filter, odnosno sistem za obradu signala, vrši određene operacije nad signalom, čiji je efekat eliminacija ili smanjenje (filtriranje) šuma i interferencije iz željenog signala koji nosi informaciju. Kada se signal „propusti“ kroz sistem kaže se da je signal obrađen. U ovom našem primeru filtra, obrada signala podrazumeva filtriranje šuma i interferencije iz željenog signala.

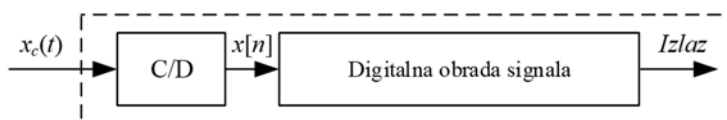
U ovom poglavlju predstavljen je osnovni koncept digitalne obrade signala. Potom je opisano predstavljanje diskretnih signala i sistema u vremenskom domenu. Tipični diskretni signali i nizovi koji nalaze široku upotrebu u praktičnim primenama prikazani su u nastavku. Od posebnog interesa su linearni vremenski invarijantni sistemi, koji su stabilni i kauzalni, i njihove karakteristike i svojstva dati su takođe u ovom poglavlju. Definisan je pojam impulsnog odziva sistema i način kako se na osnovu te karakteristike određuje odziv na svaku pobudu primenom matematičke operacije konvolucije. Na kraju je opisana reprezentacija diskretnog sistema preko linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima i pomoću blok dijagrama.

1.2 Osnovni koncept digitalne obrade signala

Na ovom mestu korisno je dodatno proširiti definiciju sistema tako da ona obuhvata ne samo fizičke uređaje, već i softverske realizacije operacija nad signalom. U širem smislu, digitalni sistem može biti implementiran kao kombinacija digitalnog hardvera i softvera, pri čemu svaki od njih izvršava svoj skup definisanih operacija.

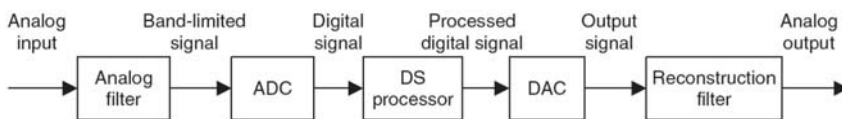
Generalno, sistem se karakteriše prema tipu operacije koju vrši nad signalom. Takve operacije se obično nazivaju obradom signala. Na primer, ako je operacija linearna, sistem se naziva linearnim. Ako je operacija nelinearna, sistem se smatra nelinearnim.

Pojednostavljena blok šema koncepta sistema za digitalnu obradu analognih signala prikazana je na slici 1.1. Pošto su mnogi signali koji se susreću u praksi analogni, neophodno je da se ti signali prvo pretvore u digitalni oblik pre nego se procesiraju pomoću digitalnih sistema. Analogni signal se uz pomoć C/D (eng. *continuous to discrete*) bloka transformiše u diskretni signal, pa se nadalje koriste alati digitalne obrade signala kako bi se generisao željeni izlazni signal. Ukoliko je potreban izlazni signal u analognoj formi, potrebno je izvršiti konverziju diskretnog (obrađenog) signala u analogni korišćenjem D/C (eng. *discrete to continuous*) bloka.



Slika 1.1 Blok šema sistema za digitalnu obradu signala.

Diskretni sistemi se najčešće realizuju primenom digitalne tehnike, ali se ponekad koriste i druge tehnologije. Sistemi za digitalnu obradu signala (eng. *digital signal processor* - *DSP*) koriste softverske alate, digitalno procesiranje i algoritme, zbog čega imaju visok stepen fleksibilnosti, manju interferenciju i nema izobličenja signala u različitim primenama. Međutim, i pored toga, realni DSP sistemi i dalje zahtevaju minimalnu analognu obradu (kao što su *anti-aliasing* filtri za ograničavanje i rekonstrukcioni filteri), koji su neophodni za pretvaranje informacija iz stvarnog sveta u digitalni oblik i obrnuto — iz digitalnog oblika nazad u informacije stvarnog sveta. Blok šema realnog DSP sistema za digitalnu obradu signala, koja uključuje i blokove za analognu obradu, prikazana je na slici 1.2.



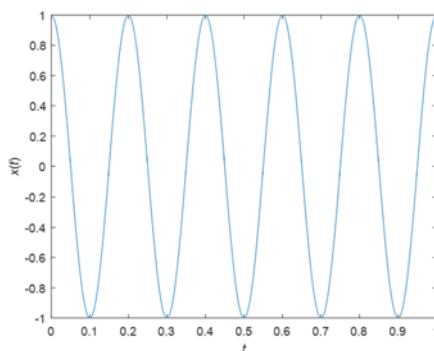
Slika 1.2 Blok šema sistema za digitalnu obradu signala sa dodatnom analognom obradom.

Obično se koristi pretvarač (npr. senzor) da bi se neelektrični signal pretvorio u analogni električni signal (npr. napon). Taj analogni signal se zatim prosleđuje analognom filteru, koji se koristi za ograničavanje frekvencijskog

opsega analognog signala pre procesa odabiranja i diskretizacije. Svrha filtriranja je značajno umanjeње izobličenja, u stručnoj literaturi, poznatog i kao *aliasing*, koje će biti detaljnije objašnjeno u narednim poglavljima. Signal sa ograničenim frekvencijskim opsegom na izlazu iz analognog filtera se zatim diskretizuje i konvertuje u digitalni signal pomoću analogno-digitalnog konvertora (eng. *analogue to digital convertor* - *ADC*), čime se dobija signal koji je diskretan i po vremenu i po amplitudi.

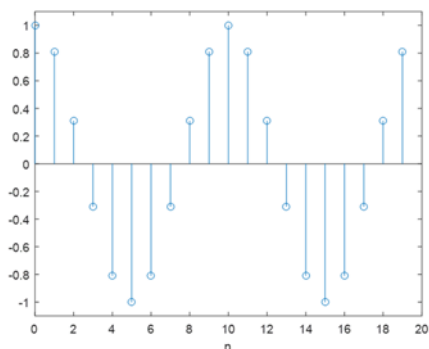
1.3 Kontinualni i diskretni signali

Kontinualni signali predstavlja signale čije su vrednosti definisane u svakom trenutku, odnosno funkcija koja predstavlja signale jeste neprekidna funkcija vremena. Dodatno, ako amplitude signala mogu uzimati proizvoljnu vrednost iz dozvoljenog opsega, signal se naziva *analogni signal*. Primer analognog signala (prostoperiodični signal kružne učestanosti ω_0) prikazan je na slici 1.3.



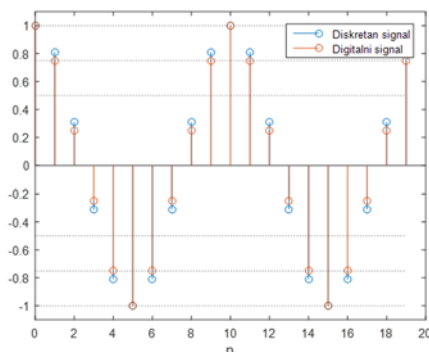
Slika 1.3 Analogni prostoperiodični signal – primer.

Diskretni signali su definisani samo u određenim, specifičnim (diskretnim) vremenskim trenucima. Te diskretne vrednosti nezavisne promenljive vremena ne moraju biti ravnomerno raspoređene, ali se u praksi najčešće uzimaju u jednakim vremenskim intervalima zbog računske praktičnosti i implementacije. Primer diskretnog prostoperiodičnog signala (koji je formiran diskretizacijom analognog prostoperiodičnog signala iz prethodnog primera 1.3) prikazan je na slici 1.4.



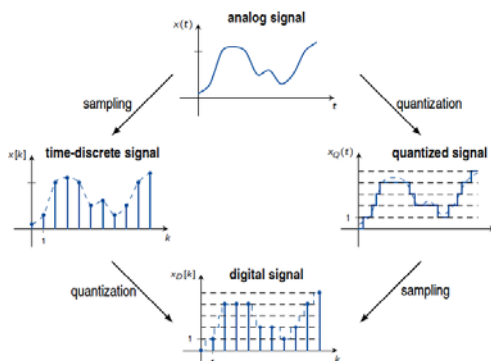
Slika 1.4 Diskretni vremenski signal dobijen diskretizacijom signala iz primera 1.3.

Amplituda diskretnog signala može biti kontinualna ili diskretna. Ukoliko je izvršena kvantizacija amplitude diskretnog signala dobijeni signal se naziva *digitalni signal*. Na slici 1.5 prikazan je primer diskretnog i digitalizovanog signala.



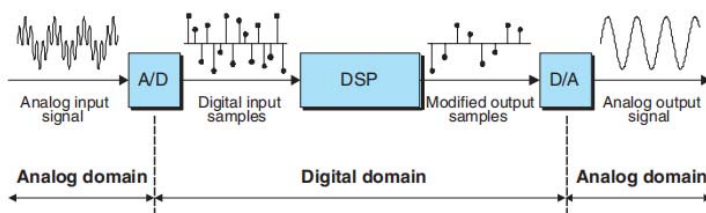
Slika 1.5 Digitalizovani diskretni signal – primer.

Analogni signal, koji je potrebno obraditi, pretvara se u digitalni signal odabiranjem u diskretnim vremenskim trenucima, čime se dobija diskretno-vremenski signal, a zatim se vrši kvantizacija njegovih vrednosti na skup diskretnih vrednosti. Kvantizacija je proces pretvaranja, odnosno aproksimacije signala sa kontinuiranim vrednostima amplitude, u signal sa diskretnim vrednostima amplitude. Primer formiranja digitalnog na osnovu analognog signala kroz faze odabiranja (eng. *sampling*) i kvantizacije (eng. *quantization*) dat je na slici 1.6.



Slika 1.6 Formiranje digitalnog signala – primer.

Odabiranje analognog signala u praksi se najčešće obavlja pomoću analogno-digitalnog (A/D) konvertora. Većina signala koji se susreću u nauci i inženjerstvu su analogne prirode. To znači da su signali funkcije kontinualne promenljive, kao što su vreme ili prostor, sa vrednostima koje se menjaju u neprekidnom opsegu. Takvi signali se mogu direktno obrađivati odgovarajućim analognim sistemima (kao što su filteri ili spektralni analizatori) ili množačima frekvencije, u svrhu promene njihovih karakteristika ili izdvajanja željenih informacija. U tom slučaju kažemo da je signal obrađen direktno u svom analognom obliku, odnosno i ulazni i izlazni signali su u analognom formatu. Alternativni metod za obradu analognog signala predstavlja digitalna obrada signala. Da bi se obrada izvršila korišćenjem alata digitalne obrade, potreban je interfejs između analognog signala i digitalnog procesora. Taj interfejs se naziva A/D konvertor. Izlaz iz A/D konvertora je digitalni signal koji je pogodan kao ulaz za digitalni procesor signala (DSP). Obrađeni signal digitalnog formata se na kraju konvertuje u analogni primenom D/A (eng. *digital to analog*) konvertora, što je prikazano na slici 1.7.



Slika 1.7 Digitalna obrada analognog signala.

Uobičajeno je da se vremenska t osa posmatra kao $n\Delta T$, odnosno samo n , pri čemu je T perioda odabiranja signala, ΔT je rastojanje na vremenskoj osi između susednih odbiraka, a n ceo broj. Dakle, diskretni signal se može

matematički predstaviti kao *niz brojeva* (realnih ili kompleksnih) čije amplitude mogu uzimati kontinualne vrednosti. Da bi se naglasila diskretno-vremenska priroda signala, takav signal se označava sa

$$\{x[n]\}, N_1 \leq n \leq N_2. \quad (1.1)$$

Vitičaste zagrade $\{\}$ se koriste da označe niz u celini, a $x[n]$ označava n -ti član (element) niza. Gornja i donja granica niza, N_1 i N_2 respektivno, mogu biti konačne ili beskonačne. Dužina niza se računa kao $N_2 - N_1 + 1$, i u zavisnosti od vrednosti N_2 i N_1 može biti konačna ili beskonačna. Diskretnan niz se može formirati na mnogo načina (npr. definisan kao linearni niz, pomoću rekursivne formule, uniformno odabiranje kontinualnog signala, itd.). Često se diskretni signali formiraju uniformnim odabiranjem analognog signala $x(t)$ sa periodom odabiranja od T sekundi, tj.

$$x[n] = x(nT) = x(t)|_{t=nT}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.2)$$

Niz koji ima konačan broj članova, $\{x[n], n = 0, 1, 2, \dots, N - 1\}$ može se predstaviti i kao vektor (matrica – kolona), tj.

$$\mathbf{x}_N = [x_0 \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{N-1}]^T, \quad (1.3)$$

gde $[\dots]^T$ označava operaciju transponovanja.

1.4 Operacije sa diskretnim signalima i nizovima

Za analizu diskretnih signala, odnosno nizova, koriste se sledeće računске operacije sa nizovima: sabiranje i množenje nizova, pomeranje niza i množenje niza konstantom.

Sabiranje ili množenje nizova se obavlja tako što se sabiraju ili množe odgovarajući elementi nizova, uz uslov da dužine nizova moraju da bude jednake. Množenje niza $\{x[n]\}$ konstantom c se vrši tako što se svaki član niza množi sa c . Pomeranje niza $\{x[n]\}$ za neku vrednost n_0 , pri čemu je n_0 ceo broj, rezultira dobijanjem pomerenog niza $\{y[n]\}$ tako da važi sledeća relacija između članova niza:

$$y[n] = x[n - n_0]. \quad (1.4)$$

Pomeraj n_0 je najčešće pozitivan, pa se zato operacija pomeranja niza naziva kašnjenje niza.

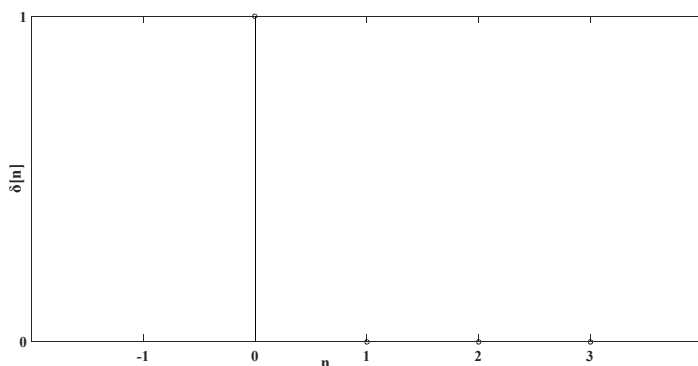
1.4.1 Tipični diskretni signali

U ovom odeljku biće definisane i prikazane neke posebne diskretne sekvence koje nalaze široku primenu u praksi.

Jedinični impuls (poznat i kao Dirakov impuls ili delta impuls) u oznaci $\{\delta[n]\}$ je niz koji ima samo jedan nenulti element, i definisan je sledećim izrazom:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Grafički prikaz jediničnog impulsa dat je na slici 1.8.



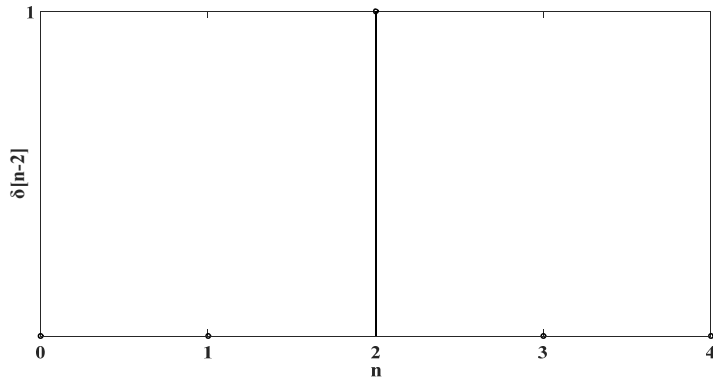
Slika 1.8 Jedinični impuls $\delta[n]$.

Funkcija jediničnog impulsa ima jediničnu amplitudu samo za $n=0$, dok je u ostalim tačkama vrednost nula. Jedinični impuls ima veliki značaj u analizi diskretnih signala.

Pomeren jedinični impuls (zakašnjen za n_0) definisan je izrazom:

$$\delta[n - n_0] = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Pomeren jedinični impuls (na primeru pomeraja u desno, $n=2$) prikazan je na slici 1.9.



Slika 1.9 Pomereni jedinični impuls za $n=2$.

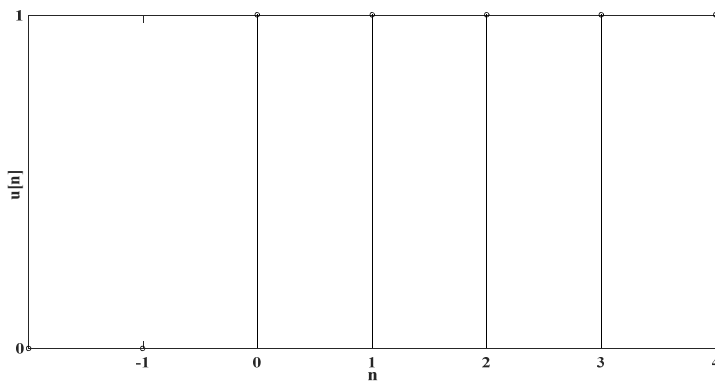
Najvažnija karakteristika jediničnog impulsa je *osobina selektivnosti* (izdvajanje za $n = k$), zahvaljujući kojoj se n -ti član niza može predstaviti u formi:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k]. \quad (1.7)$$

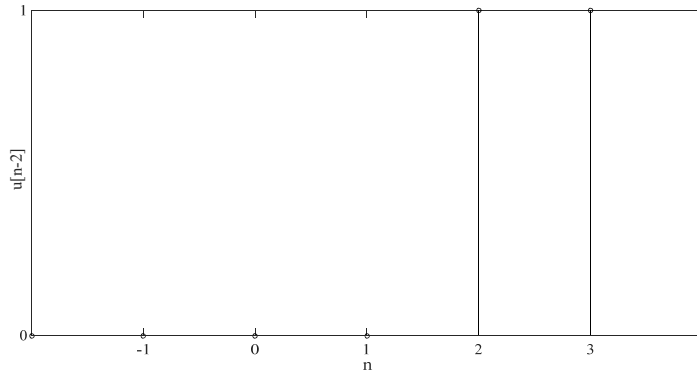
Jedinični odskočni niz, $\{u(n)\}$ se često naziva i diskretna Hevisajdova (eng. *Heaviside*) funkcija. Prema definiciji ima sve elemente nula za $n < 0$, a sve jedinice za $n \geq 0$, odnosno:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Na slici 1.10 prikazan je jedinični odskočni niz, dok je primer pomerenog jediničnog odskočnog niza ($n=2$) prikazan na slici 1.11.



Slika 1.10 Jedinični odskočni niz $u[n]$.



Slika 1.11 Pomereni jedinični odskočni niz $u[n - 2]$.

Za analizu je od interesa interpretacija jediničnog odskočnog niza preko jediničnog impulsa, odnosno:

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k], \quad (1.9)$$

ili njegovog pomerenog oblika:

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - k]. \quad (1.10)$$

Sinusni i kosinusni niz, $\{x[n]\}$ definišu se kao:

$$x[n] = \sin(\omega n), \quad (1.11)$$

odnosno

$$x[n] = \cos(\omega n), \quad (1.12)$$

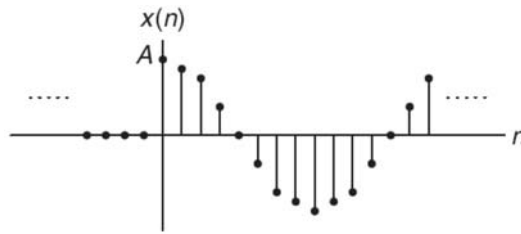
gde ω u oba izraza predstavlja kružnu frekvenciju, datu u [rad] ili [rad/odbirku].

Eksponencijalni niz se definiše kao:

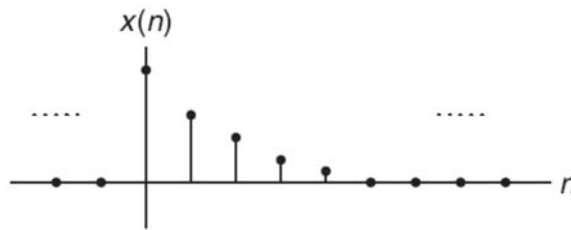
$$g[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}. \quad (1.13)$$

Ukoliko je a realna konstanta takva da je $|a| < 1$, u pitanju je opadajući realni eksponencijalni niz.

Primeri sinusoidalnog i eksponencijalnog diskretnog niza prikazani su na slikama 1.12 i 1.13, respektivno.



Slika 1.12 Sinusoidalni diskretni signal.



Slika 1.13 Eksponencijalni diskretni signal.

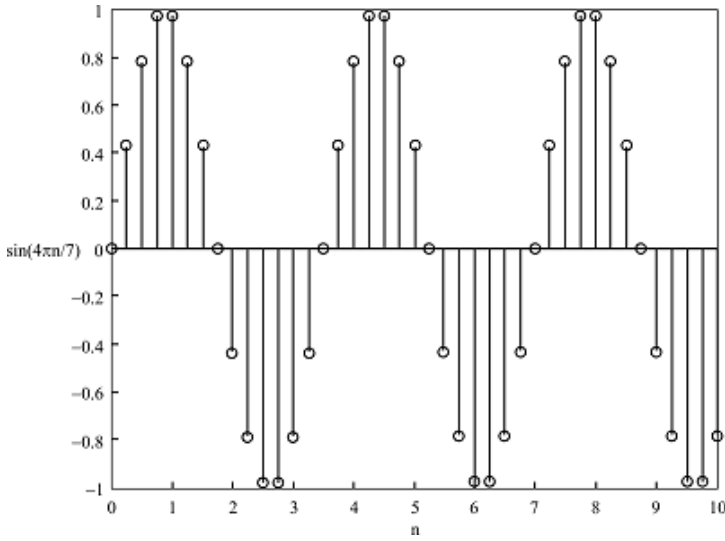
Prostoperiodični nizovi (sinusni i kosinusni) imaju jednu vrlo važnu osobinu koja ih čini pogodnom za izvođenje Furijeove transformacije diskretnih nizova, a to je periodičnost. Diskretan niz $\{x[n]\}$ je periodičan ukoliko ispunjava uslov:

$$x[n] = x[n + N], \quad (1.14)$$

gde je N ceo broj i označava periodu ponavljanja diskretnog periodičnog signala. Važno je napomenuti da svaki diskretan sinusni ili kosinusni signal ne mora biti i periodičan. Uslov periodičnosti za diskretan sinusni signal je sledeći:

$$\sin(\omega_0 n) = \sin(\omega_0 (n + N)) = \sin(\omega_0 n + \omega_0 N) \Rightarrow \omega_0 = 2k\pi/N, \quad (1.15)$$

gde je k ceo broj. Primer periodičnog sinusnog niza za $k=2$ i $N=7$ dat je na slici 1.14.



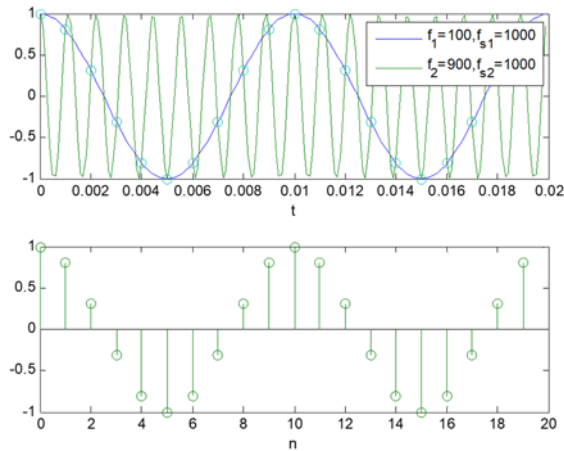
Slika 1.14 Sinusni periodični niz, $\omega = \frac{4\pi}{7}$.

Sinusni i kosinusni diskretni nizovi imaju još jednu interesantnu karakteristiku. Skup svih vrednosti koje kružne frekvencije sinusnog ili kosinusnog niza mogu imati nalaze se u opsegu $-\pi < \omega \leq \pi$, odnosno važi:

$$\cos(\omega_2 n) = \cos((\omega_1 + 2m\pi)n) = \cos(\omega_1 n). \quad (1.16)$$

Time je pokazano da se sve vrednosti sinusnih i kosinusnih diskretnih signala mogu predstaviti u funkciji ω u opsegu $[-\pi, \pi]$.

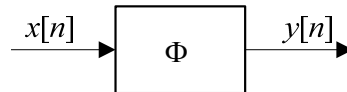
Ono na šta bi trebalo obratiti pažnju prilikom odabiranja signala jeste preklapanje spektra. U literaturi se odomaćio engleski termin *aliasing*, ili u bukvalnom prevodu *lažno predstavljanje*. U sledećim poglavljima će se čitaoci upoznati sa potrebnim uslovima za pravilno odabiranje signala. Na slici 1.15 prikazan je primer dva različita kontinualna signala, sa jednakim diskretnim signalima (koriste se iste frekvencije odabiranja).



Slika 1.15 Primer dva različita kontinualna signala sa istim diskretnim signalima.

1.5 Linearni vremenski invarijantni sistemi

Diskretni sistem definiše se kao preslikavanje koje transformiše jedan diskretni signal (*ulaz, pobuda*) u drugi poželjan diskretni signal (*izlaz, odziv*). Jednostavan koncept diskretnog sistema prikazan je na slici 1.16.



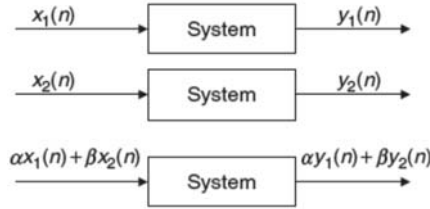
Slika 1.16 Koncept diskretnog sistema.

Diskretni sistem definisan je operatorom $\Phi\{\dots\}$. On opisuje *ulazno-izlaznu relaciju* kojom se vrši preslikavanje ulaznog signala $\{x[n]\}$ u izlazni signal $\{y[n]\}$, odnosno označava da se za izračunavanje jednog člana niza $\{y[n]\}$ koriste svi članovi niza $\{x[n]\}$. Operator je određen samim diskretnim sistemom, i može biti definisan u vremenskom ili frekvencijskom domenu.

U odnosu na osobine operatora Φ definišu se različite klase diskretnih sistema. Od posebnog su interesa *linearni vremenski invarijantni* (eng. *linear time invariant, LTI*) sistemi koji su *stabilni* i *kauzalni*. U nastavku će biti razmotrene ove osobine.

Linearnost diskretnih sistema:

Linearni sistem je prikazan na slici 1.17, gde $y_1(n)$ predstavlja izlaz sistema za ulaz $x_1(n)$, a $y_2(n)$ izlaz sistema za ulaz $x_2(n)$.



Slika 1.17 Diskretni linearni sistem.

Slika 1.17 ilustruje da je odziv linearnog sistema na pobudu koja je data kao težinski zbir pojedinačnih pobuda $\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)$ jednak istom takvom težinskom zbiru pojedinačnih odziva na odgovarajuće pojedinačne pobude, tj.:

$$y(n) = \alpha y_1(n) + \beta y_2(n), \quad (1.18)$$

gde su α i β proizvoljne konstante. **Linearnost** znači da u sistemu važi princip superpozicije, kao što je prikazano u izrazu (1.18), odnosno da su zadovoljeni uslovi homogenosti i aditivnosti. Odziv sistema na bilo koji ulaz može se predstaviti kao superpozicija (zbir) odziva na pojednostavljene ulaze. **Princip superpozicije** omogućava da se složeni signali razlože na jednostavnije komponente, odzivi izračunaju pojedinačno, i zatim saberu da bi se dobio konačan odziv. Ovo je ključno za analizu i dizajn LTI sistema, posebno u elektronici, obradi signala i komunikacionim sistemima.

Primer 1.1: Posmatrajmo diskretni sistem u formi digitalnog pojačavača čija je odziv $y(n) = 10x(n)$, odnosno odziv se izračunava tako što se pobuda pomnoži sa koeficijentom 10. Ulazi $x_1(n) = u(n)$ (jedinični odskočni signal) i $x_2(n) = \delta(n)$ (jedinični impuls) generišu izlaze $y_1(n) = 10u(n)$ i $y_2(n) = 10\delta(n)$, respektivno.

Na ulaz u sistem dovedi se signal koji je rezultat superpozicije ova dva ulazna signala u formi

$$x(n) = 2x_1(n) + 4x_2(n) = 2u(n) + 4\delta(n). \quad (1.19)$$

Izlaz na kombinovani ulazni signal se dobija kao:

$$y(n) = 10x(n) = 20x_1(n) + 40x_2(n) = 20u(n) + 40\delta(n). \quad (1.20)$$

Ako sa druge strane analitički izračunamo izraz:

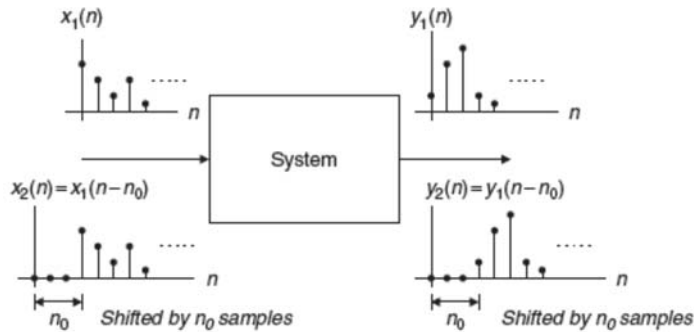
$$2y_1(n) + 4y_2(n) = 20u(n) + 40\delta(n), \quad (1.21)$$

Iako se izvodi zaključak da su izrazi (1.20) i (1.21) identični, odnosno da je dati sistem linearan i da važi princip superpozicije.

Čitaocima se ostavlja za vežbu da ispitaju linearnost sistema definisanog ulazno-izlaznom relacijom: $y(n) = x^2(n)$.

Vremenska invarijantnost diskretnih sistema:

Vremenski invarijantan sistem prikazan je na slici 1.18, gde je $y_1(n)$ odziv sistema na pobudni signal $x_1(n)$. Prema definiciji, sistem je vremenski invarijantan (nepromenljiv) ako pomeraj ulaznog niza za n_0 , $x_2(n) = x_1(n - n_0)$ rezultira istim takvim pomerajem izlaznog niza, $y_2(n) = y_1(n - n_0)$.



Slika 1.18 Ilustracija vremenski invarijantnog sistema.

Digitalni pojačavač iz prethodnog primera 1.1 predstavlja vremenski invarijantni sistem, što je lako utvrditi.

Kauzalnost diskretnih sistema:

Kauzalni sistem je onaj u kome izlaz $y(n)$ u trenutku n zavisi samo od trenutnog ulaza $x(n)$ u tom istom trenutku, kao i od prethodnih vrednosti ulaza, kao što su $x(n-1)$, $x(n-2)$, itd. U suprotnom, ako izlaz sistema zavisi od budućih vrednosti ulaza, kao što su $x(n+1)$, $x(n+2)$ itd., sistem je nekauzalan. Nekaualan sistem se ne može realizovati u realnom vremenu.

Primer 1.2: Sistem opisan izrazom $y[n] = x[n+1] + x[n]$ je nekauzalan, jer n -ti član niza $\{y[n]\}$ zavisi od tekućeg i budućeg člana niza $\{x[n]\}$.

Sistem opisan izrazom: $y[n] = x[n] + 2x[n-1]$ je kauzalan, jer n -ti član niza $\{y[n]\}$ zavisi od tekućeg i prethodnog člana niza $\{x[n]\}$.

Stabilnost diskretnih sistema:

Za praktične primene od interesa su samo **stabilni sistemi**. Za diskretni sistem kažemo da je stabilan ako i samo ako ograničen ulazni niz prouzrokuje ograničen izlazni niz. Odnosno, niz $\{x[n]\}$ je ograničen ako postoji neka konačna pozitivna vrednost A za koju je:

$$|x[n]| \leq A, \text{ za svako } n. \quad (1.22)$$

Ako je sistem stabilan onda mora postojati neka određena konačna vrednost B za koju važi sledeća relacija:

$$|y[n]| \leq B, \text{ za svako } n. \quad (1.23)$$

Sistem digitalnog pojačavača (primer 1.1) predstavlja primer stabilnog sistema, što je lako dokazati i ostavlja se čitaocima za vežbu.

1.5.1 Linearne diferencne jednačine sa konstantnim koeficijentima

Zbog praktične primene, od posebnog značaja su sistemi koji su **linearni** i **vremenski invarijantni**. Takav sistem može se opisati preko linearnih diferencnih jednačina sa konstantnim koeficijentima koje imaju opšti oblik:

$$\sum_{k=0}^N b_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M a_k x[n-k], \quad (1.24)$$

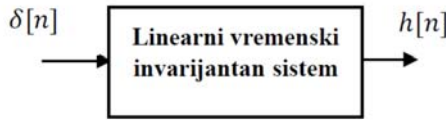
gde $a_1, \dots, a_M$ i $b_0, \dots, b_N$ predstavljaju konstantne koeficijente diferencne jednačine. Ovakva diferencna jednačina nema jednoznačno rešenje, već postoji ceo set rešenja, što znači da se moraju definisati početni uslovi u cilju rešavanja. Kao logičan izbor za početan uslov, nameće se kauzalnost.

Ukoliko je linearni vremenski invarijantan sistem kauzalan, diferencna jednačina koja ga opisuje piše se u obliku:

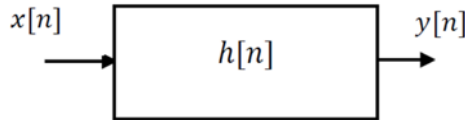
$$y[n] = \sum_{k=0}^M a_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N b_k y[n-k] \quad (1.25)$$

gde je $b_0 = 1$. Iz jednačine je očigledno da trenutni izlaz $y(n)$ zavisi od prethodnih odbiraka $y(n-1), \dots, y(n-N)$, od trenutnog odbirka $x(n)$, kao i od od prethodnih ulaznih odbiraka $x(n-1), \dots, x(n-N)$. Za ovakav sistem kaže se da je rekurzivan. Ovakve sisteme nazivamo sistemi sa konačnim impulsnim odzivom (eng. *Finite impulse response*, FIR).

Linearni vremenski invarijantni sistem u vremenskom domenu potpuno je opisan svojim impulsnim odzivom, u oznaci $h(n)$, koji se definiše kao odziv sistema na jedinični impuls $\{\delta(n)\}$, uz početne uslove jednake nuli, kao što je prikazano na slici 1.19. Reprezentacija linearnog vremenski invarijantnog sistema preko tako dobijenog impulsnog odziva data je na slici 1.20.



Slika 1.19 Odziv sistema na jedinični impuls.



Slika 1.20 Prikaz LTI sistema preko impulsnog odziva.

Generalno, što je izuzetno važno sa aspekta praktične primene i implementacije, izlazni niz ovakvog sistema može se izračunati kao konvolucija između ulaznog niza i impulsnog odziva sistema, odnosno kao:

$$y(n) = \Phi\{x[n]\} = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k], \quad (1.26)$$

gde operator $*$ konvencionalno označava operaciju konvolucije dva niza. Operacija konvolucije je komutativna, što znači da činioci, tj. nizovi $x[n]$ i $h[n]$ mogu da zamene svoja mesta. Takođe, iz jednačine (1.26) je evidentno da to važi i za kauzalne i nekauzalne sisteme.

Konvolucija dva niza konačne dužine daje niz takođe konačne dužine, N_y :

$$N_y = N_x + N_h - 1, \quad (1.27)$$

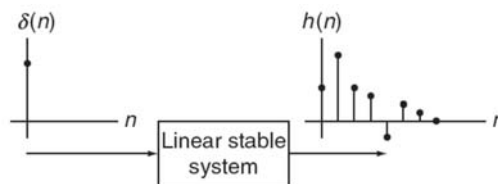
gde N_x i N_h predstavljaju dužine ulaznog niza i impulsnog odziva sistema, respektivno. Upravo prema dužini impulsnog odziva razlikuju se dve klase sistema. To su sistemi sa konačnom dužinom impulsnog odziva – FIR sistemi i sistemi sa beskonačnom dužinom impulsnog odziva (eng. *Infinite Impulse Response*, IIR).

1.5.2 Stabilnost i kauzalnost LTI sistema

Sa aspekta projektovanja i implementacije od posebnog interesa su stabilni i kauzalni linearni vremenski invarijantni sistemi. Stabilan sistem je onaj kod kojeg svaki ograničeni ulazni signal na izlazu proizvodi ograničeni izlaz, tzv. BIBO kriterijum (eng. *Bounded Input Bounded Output*). Ovo predstavlja samo jednu od definicija stabilnosti. Iz praktičnih razloga osobine stabilnosti i kauzalnosti sistema se proveravaju preko impulsnog odziva (kako se ne bi proveravalo za sve pojedinačne ulazne signale). Da bi sistem bio stabilan potreban i dovoljan uslov koji mora ispunjavati njegov impulsni odziv je sledeći:

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \leq \infty, \quad (1.28)$$

pri čemu S predstavlja parameter koji se naziva faktor stabilnosti. Dakle, sistem je stabilan ukoliko je njegov faktor stabilnosti konačan broj. Na slici 1.21 ilustrovan je primer stabilnog LTI sistema.



Slika 1.21 Primer stabilnog LTI sistema.

Kako impulsni odziv predstavlja odziv na jedinični impuls, koji ima samo jedan nenulti elemenat (za $n=0$), LTI sistem je kauzalan ukoliko njegov impulsni odziv zadovoljava sledeći uslov:

$$h(n) = 0, \text{ za } n < 0. \quad (1.29)$$

U tom slučaju donja granica za konvoluciju jeste nula, odnosno izraz (1.26) postaje:

$$y(n) = \Phi\{x[n]\} = x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]h[n-k]. \quad (1.30)$$

Razvojem sume u izrazu (1.30), evidentno je da je za određivanje svakog pojedinačnog člana izlaznog niza $y[n]$ potrebno koristiti svaki član ulaznog niza $x[n]$, odnosno:

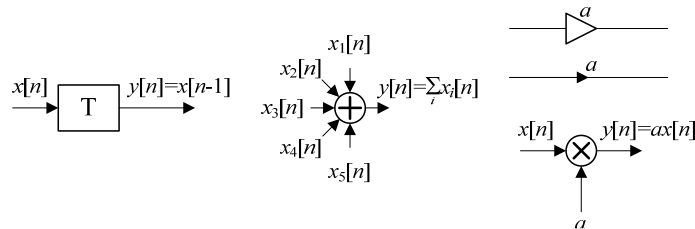
$$y[0] = x[0]h[0], \quad (1.31)$$

$$y[1] = x[0]h[1] + x[1]h[0], \quad (1.32)$$

$$y[2] = x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0], \dots \quad (1.33)$$

1.5.3 Blok dijagram diskretnih sistema

Za dati impulsni odziv, izlaz sistema je zbir proizvoda koeficijenata impulsnog odziva i odgovarajućih odbiraka ulaza, što se naziva digitalni konvolucionni zbir. Digitalni konvolucionni zbir, koji zapravo predstavlja DSP sistem, može se izračunati na tri načina: grafičkom metodom, razvojem formule i tabelarnom metodom. Grafičko predstavljanje jednačina se vrši preko blok dijagrama, tako što se uvode simboli za osnovne operacije (kašnjenje, sabiranje i množenje), što je prikazano na slici 1.22, respektivno.

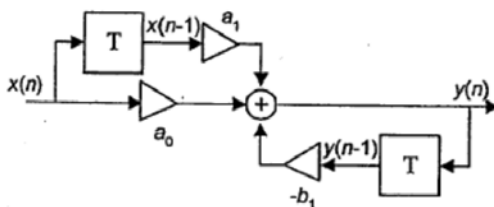


Slika 1.22 Prikaz osnovnih operacija (kašnjenje, sabiranje i množenje, respektivno).

Primer 1.3 Grafički prikazati blok dijagram diferencne jednačine sistema prvog reda opisanog diferencnom jednačinom:

$$y[n] = a_0x[n] + a_1x[n-1] - b_1y[n-1]. \quad (1.34)$$

Rešenje: Blok dijagram LTI sistema opisanog diferencnom jednačinom (1.34) prikazan je na slici 1.23.



Slika 1.23 Blok dijagram sistema prvog reda.

Rezime

Ovo poglavlje daje pregled osnovne teorije diskretnih signala (sekvenci) i diskretnih sistema. Čitaocima su data bliža objašnjenja o načinima reprezentacije diskretnih signala i sistema. Obrada signala u vremenskom domenu, odnosno odziv diskretnog sistema izračunava se primenom osnovnih matematičkih alata i operacija nad diskretnim nizovima, koji predstavljaju ulazne (pobudne) signale. Od posebnog je interesa klasa diskretnih sistema, koji su *linearni* i *vremenski invarijantni* (LTI) i koji su stabilni i kauzalni. Odziv LTI sistema u vremenskom domenu dobija kao rezultat konvolucije ulaznog (pobudnog) signala i impulsnog odziva diskretnog sistema.

Čitaoci se upoznaju sa osnovnim konceptom digitalne obrade signala. Signal se definiše kao funkcija jedne ili više osnovnih promenljivih i nosilac je određene informacije. Navedene su razlike između analognih, diskretnih i digitalnih signala, uz opis procesa diskretizacije i kvantizacije, kao i potrebne funkcije konverzije C/D i D/C. Predstavljene su osnovne operacije nad diskretnim nizovima, kao i tipične diskretne sekvence koje nalaze široku praktičnu upotrebu. Diskretni sistemi se mogu reprezentovati preko linearnih diferencnih jednačina i

blok dijagrama, pri čemu se razlikuju FIR i IIR sistemi. Poglavlje uključuje praktične primere i zadatke za vežbu, omogućavajući čitaocima da primene teorijsko znanje u softverskim i numeričkim simulacijama.

Zadaci za vežbu

Zadatak 1. U programskom jeziku MATLAB generisati po pedeset odbiraka diskretnih signala $\{x[n]\}$ i $\{h[n]\}$, definisanih izrazima: $x[n] = 0.8^n u[n]$, $h[n] = 0.6^n u[n]$, gde $u[n]$ predstavlja jedinični odskočni niz. Grafički prikazati ova dva signala. Izračunati i grafički predstaviti izlazni signal $\{y[n]\}$ koji je dobijen konvolucijom signala $\{x[n]\}$ i $\{h[n]\}$.

Zadatak 2. Ispitati linearnost, stabilnost i kauzalnost sistema definisanog ulazno-izlaznom relacijom: $y(n) = x^2(n)$.

Zadatak 3. U programskom jeziku MATLAB formirati diskretne nizove i predstaviti ih grafički:

$$y_1[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{16}\right), n = 0, 1, \dots, 127$$

$$y_2[n] = \cos\left(\frac{2\pi 5n}{16}\right), n = 0, 1, \dots, 127$$

$$y_3[n] = \cos\left(\frac{2\pi 1.6n}{16}\right), n = 0, 1, \dots, 127$$

$$y_4[n] = \sin\left(\frac{2\pi n}{128}\right), n = 0, 1, \dots, 127$$

Ispitati periodičnost datih nizova.

Zadatak 4. Ulazno-izlazna relacija kauzalnog sistema data je diferencnom jednačinom:

$$y_1[n] = x[n] + 0.6y[n-1]$$

$$y_2[n] = 2x[n] - 0.6y[n+1]$$

Predstaviti blok dijagramom diferencnu jednačinu sistema prvog reda.

Zadatak 5. Odrediti i grafički prikazati prvih trideset odbiraka izlaznog signala kauzalnog sistema, koji je opisan diferencnom jednačinom prvog reda iz prethodnog zadatka, $y[n] = x[n] + 0.6y[n - 1]$. Sistem je pobuđen nizom iz prvog zadatka, $x[n] = 0.8^n u[n]$, gde $u[n]$ predstavlja jedinični odskočni niz.